λ×$T_{1/2}$＝0.693 という関係を納得してもらうために！

数学になじみのない方のための
放射能計算に必要な数学の手引き（の試み）
ー 指数、対数、微分・積分の解説 －

今中 哲二
京都大学複合原子力科学研究所

V2.3
2019.6.24

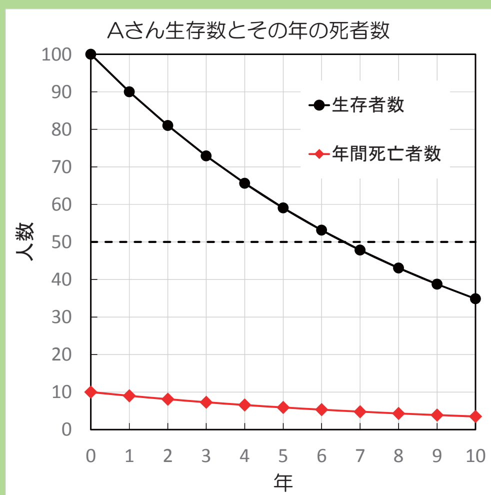
まえがき

一卵性双生児のようなクローン人間が100人いたとしよう。100人の見かけは全く同じで区別がつかず、みんなAさんと呼ぶことにする。Aさんたちは、歳をとらず何年経っても変化しない。ただ、不思議なことに、毎年、死亡率1割で亡くなってしまう。

●問題：いまAさんが100人いたとして、半分の50人になるのは何年後でしょう。

以下に、毎年の死者数、生存者数の計算とプロットを示す。

	1年間に亡くなる人数	その年初めの人数
1年目	10.0	100
2年目	9.0	90.0
3年目	8.1	81.0
4年目	7.3	72.9
5年目	6.6	65.6
6年目	5.9	59.0
7年目	5.3	53.1
8年目	4.8	47.8
9年目	4.3	43.0
10年目	3.9	38.7
11年目	3.5	34.9



Aさん生存者が50人となるのは、7年目の途中である。

『放射性崩壊』になぞらえるなら、毎年の死者数がベクレル数で、Aさんの生存数が放射性同位体の原子数に対応している。

はじめに(1)

1グラムのセシウム137は何ベクレルでしょう？

という問題を考えて見よう。

この問題の答は、以下の3ステップの計算で得られる。

- ステップ1：1グラムのセシウム137中の原子数(N)の計算：

核データ*より、Cs137の原子量は136.9。したがって

$$\mathrm{N} = \frac{（アボガドロ数）}{（原子量）} = \frac{6.022\times10^{23}}{136.9} = 4.399 \times 10^{21} \quad 個 \quad \cdots①$$

- ステップ2：セシウム137の崩壊定数(λ)の計算：

＜崩壊定数とは、その原子核が単位時間の間に放射性崩壊を起こす確率＞

崩壊定数と半減期($T_{1/2}$)の間には、$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$ ・・・②

という関係がある。

核データ*よりCs137の半減期は30.08年なので、1秒当りの崩壊確率 λ は、

λ ＝0.693/30.08/365.25/24/60/60=7.300×10^{-10} 秒$^{-1}$ ・・・③

- ステップ3：①と②より、1gのCs137の放射能量(A)は

A＝ λ ・N＝(7.300×10^{-10})×(4.399×10^{21})＝ 3.211×10^{12} Bq

となる。

*核データ表 https://wwwndc.jaea.go.jp/cgi-bin/nucltab14?55

はじめに(2)

ステップ1の $\mathrm{N} = \frac{（アボガドロ数）}{（原子量）} = \frac{6.022\times10^{23}}{136.9} = 4.399 \times 10^{21}$ は、化学の素養がある方には簡単だが、素養が不足の方のために説明しておく。

- 『原子量』というのは、原子(核)の相対的な重さを示す単位で、一番軽い水素を1としたときの、他の元素原子の重さを示している。(より正しくは、炭素12(C−12)の重さを基準にしている。)普通の水素は、陽子1つであるのに対し、Cs137には陽子55個と中性子82個はあるので、その原子量は136.9となっている。(137に比べ0.1ほど小さいのは、『質量欠損』と呼ばれ、陽子や中性子の結合エネルギーに対応している。)

- 水素1gに含まれる水素原子の数は 6.022×10^{23} 個である。じっと考えて頂くと納得頂けると思うが、136.9グラムのセシウム137に含まれるCs137原子の数も 6.022×10^{23} となる。故に、1グラムのCs137に含まれる原子数は、①式で得られる。

- ちなみに、原子や分子がアボガドロ数(6.022×10^{23} 個)集まった量を『1モル』とよぶ。水素分子(H_2)の1モルは2gで、ウラン235原子の1モルは235gである。

はじめに(3)

ステップ2の②式：$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$ は、『半減期から崩壊定数を求める式』である。入れ替えたら『崩壊定数から半減期を求める式』となる。普通の放射能データブックには半減期しか出ていないので、崩壊定数が必要なときにはこの式を使う。

0.693の由来は、$\log_e 2 = 0.693147181 \ldots$.である。数学の素養のある方には『2の自然対数か』ということで何ほどのこともないが、素養不足の方には大変なバリアであろう。

まず、数学の素養はあるものの放射能になじみのない方のために、②式を証明しておこう。

- 時間tの時に、崩壊定数λの放射性原子がN(t)個あったとしよう。
- このときの放射能量はλN(t)である。つまり、原子の数は単位時間当りλN(t)個減少しているので

$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ という微分方程式で記述できる。

この方程式を解くと、$N(t) = Ce^{-\lambda t}$ となる（Cは積分定数）。

初期条件として、t=0の時N(0)＝N_0とすると、$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ ・・・④

時間t=$T_{1/2}$の時、原子の数は半分になっているので、④式より

$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \rightarrow 2 = e^{\lambda T_{1/2}} \rightarrow \lambda T_{1/2} = \log_e 2$ となって②式が得られる。

はじめに(4)

本メモの目的は、数学の素養をお持ちでない方を対象に、②式：$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$を理解して頂くために必要な数学知識の説明である。

- 指数と対数
- 微分と積分の初歩

について解説し、

最初の放射能量がA_0ベクレルだったとき、t時間後の放射能量$A(t)$は、

$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ ・・・⑤

で記述できることを納得して頂ければ、私の試みは成功である。そして、

1グラムのヨウ素131は何ベクレルでしょう？

という問題にも容易に答えてもらえると思っている。

（ちなみに、⑤式は、$A(t) = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}} = A_0 2^{-t/T_{1/2}}$ と同等である。）

指数(べき乗)

改めて数学用語の定義をチェックしてみると、

aとbをある数としたとき、a^bは『べき乗演算』と呼ばれ、aは“底”で、bは“べき指数”と呼ぶそうだ。aとbは、整数（小数のない跳び跳びの数）でも実数（小数点以下がある数）でも構わないが、このメモでは、『aはゼロより大きい、a>0』という制限を付けておく。

- $2 \times 2 = 2^2$、$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ は説明不要と思う。
- $2^2 \times 2^2 = 2^{2+2} = 2^4$、$2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6$

上式を一般化すると、$a^x \times a^y = a^{x+y}$、$a^x \times a^y \times a^z = a^{x+y+z}$ となる。

- $2^2 \times 2^2 = (2^2)^2 = 2^{2\times2} = 2^4$、$2^2 \times 2^2 \times 2^2 = (2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$

上式を一般化すると、$(a^x)^y = a^{xy}$ となる。

指数に“ー”が付いているのは、『分数表記が面倒くさい』ためで、$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ のことである。

＜例題＞

- 年5%の利息が付く銀行預金にM_0円預けたとき、10年後の通帳は、
  $\mathrm{M}(10年) = M_0(1.05)^{10} = 1.629M_0$ 円となる。
- 半減期１年の放射性物質がA_0ベクレルあったとき、10年後には、
  $A(10年) = A_0(0.5)^{10} = A_0 2^{-10} \cong 0.001A_0$ となる。

e(ネピア数“イー”)(1)

理工系の教科書には、e（ふつう“イー”と呼ぶ）がしばしば登場する。

先に示したように、放射能の時間減衰は、 $A(t) = A_0e^{-\lambda t}$。

また、物に垂直入射した放射線の表面から深さx *cm* での減衰量は、線減衰係数をμ cm^{-1}として、 $I(x) = I_0e^{-\mu x}$ と表されたりする。（付録参照）

- 値は、e=2.718281828.....。みなさんよくご存知の円周率πのように、『自然界に潜んでいる値のひとつ』と思って頂けたらと思う。

＜由来＞

a^nというべき演算において、n→∞（無限大）の場合を考えよう

$a > 1$のとき、$\lim_{n\to\infty} a^n \to \infty$

$a = 1$のとき、$\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

$a < 1$のとき、$\lim_{n\to\infty} a^n \to 0$ はOKだと思う。

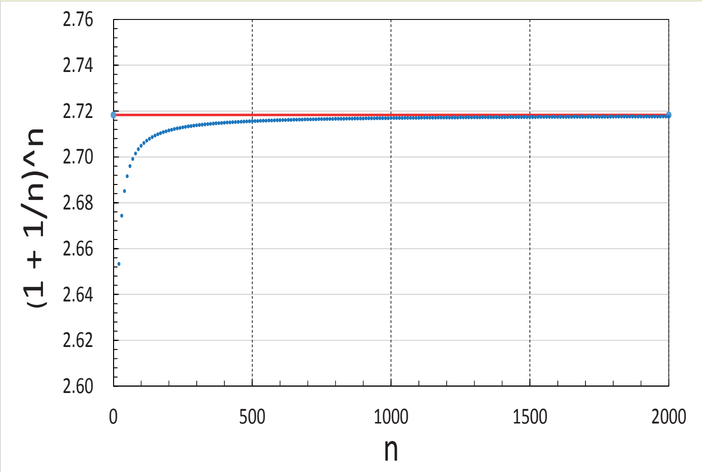
次に、n→∞のとき、次第にaが1に近くなる場合、つまり $a = 1 + \frac{1}{n}$ を考えよう。

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \quad ・・・⑥$$

この値が、eである。

e(ネピア数“イー”)(2)

nを横軸にとって、⑥式がeに収束する様子をプロットしたのが図１である（赤い線がe値）。



⑥式を、x=1/n と置き換えて、

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

と表しても同じ値になる。

また、

$$\lim_{n \to \infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} = 0.3679...$$

である。

● 指数関数

“関数”とは、変数（入力）に依存して決まってくる値（出力）の関係を示す式のことで、$y = a^x$ の形の関数は指数関数と呼ばれる。（ただしa>0で、ふつうa≠1。）aは「指数関数の底」と呼ばれる。

狭義に、a=eの場合を指数関数ということもある。

$y = \exp(x)$ は $y = e^x$ と同じことで、書き方が違うだけである。

対数(1)

＜余談＞
福島原発事故の損害賠償に関連して、ADR（裁判外紛争解決手続き）というのがある。一昨年、飯舘村村民が申請したADRで私は飯舘村での初期被曝量について、ADR仲裁委員のヒアリングを受けた。私の報告の後、東電側代理人の弁護士さんが『今中先生が使っている図はオカシイ。単位が間違っている』というような反論をしてきた。『何のことやら？』と思って、その弁護士さんの話を確かめると、どうやら東電側弁護士さん達は“対数表示”というものを理解していないようで、唖然としてしまった。

****

● 定義云々よりもまずは慣れてもらおう。

0.00001、0.0001、0.001、0.01、0.1、1、10、100、1000、10000、100000

という11個の数を考えよう。これらの数は、

10^{-5}、10^{-4}、10^{-3}、10^{-2}、10^{-1}、10^{0}、10^{1}、10^{2}、10^{3}、10^{4}、10^{5}

と書いても同じである。

では、『50は10の何乗か？』というと、$50=10^{1.699}$である。

50が分かると、$500=50\times10=10^{1.699}\times10^{1}=10^{2.699}$、また$5=10^{0.699}$となることを理解して頂けると思う。

aがゼロ以上の数であれば、どんなに大きくても小さくても、

$a = 10^b$ で表すことができ、たとえば 0.00001から100000という10桁の範囲であっても、b=-5～+5の間の値で示すことができる。

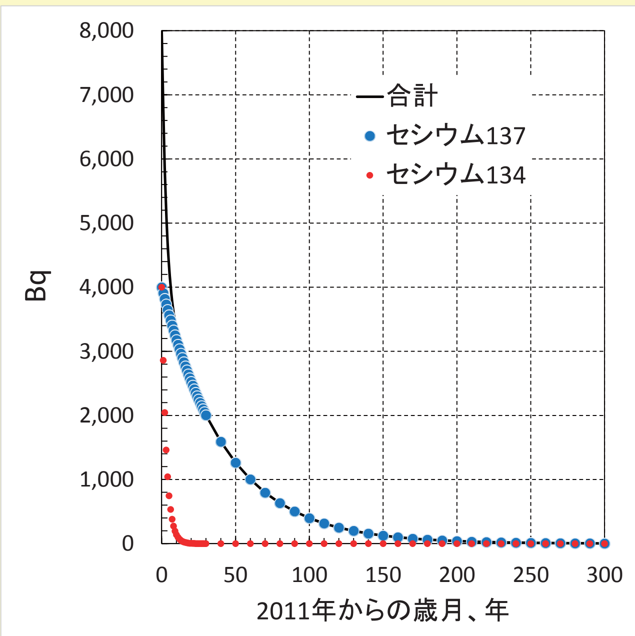
対数(2)

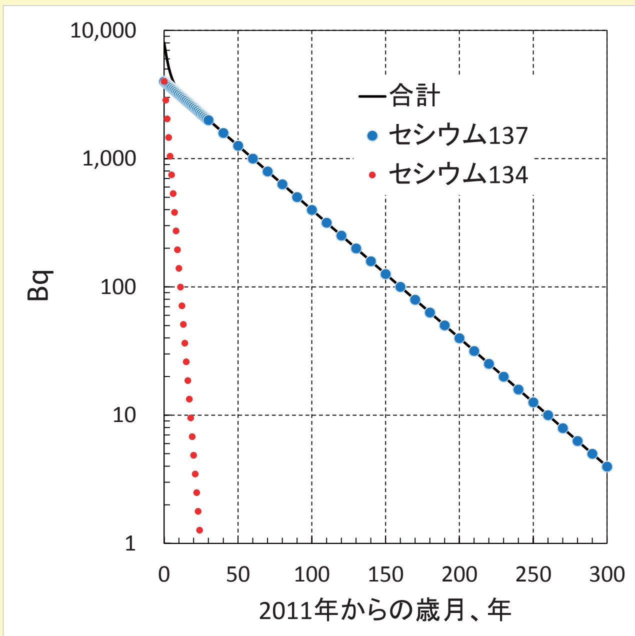
- 指数のところで述べたように　$a = 10^b$　の b は、10を底としたときのべき指数に対応する。
  bの側からaをみたときは、『b は10を底とするaの対数』と呼ばれ、
  $\mathrm{b} = \log_{10} a$　・・・⑦
  と記述される。
  先の例でいえば、$\log_{10} 100000 = 5$、$\log_{10} 0.0001 = -4$である。
- 10を底とする対数は『常用対数』、eを底とする対数は『自然対数』とよばれる。
- 通常使われる対数は、常用対数か自然対数かのどちらかなので、表記の際には底を省いて、常用対数は$\log(x)$、自然対数は$\ln(x)$のように書くことが多い。
- 対数の演算規則：常用対数、自然対数にかかわらず、
  - $\log(a) + \log(\mathrm{b}) = \log(\mathrm{ab})$
  - $\log(a) - \log(\mathrm{b}) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$
  - $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$

  ついでに、$\log_{10} 10 = 1$、$\log_e e = 1$　で、
  $\log_{10} 1 = 0$、$\log_e 1 = 0$　であることも覚えておきたい。

対数(3)：対数プロットのメリット

- 2011年3月にセシウム137とセシウム134が4000Bqずつ、合計8000Bqあったとして、その後300年間の減衰の様子を、縦軸を通常目盛（線形目盛）（左）と対数目盛（右）でプロットして比較してみた





右のグラフからは、100Bqになるのは約160年後、10Bqになるのは約260年後と、すぐに判定できる。左のグラフでは150後以降は情報が得られない。

微分と積分の話(1)

- 世間では、“微分・積分”と聞くだけで自動的に拒否反応を示される人の方が多いことと思っている。それを承知で、$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$の関係式を納得してもらうために努力してみよう。
- 私流に言えば、『微分は割り算、積分は足し算』である。もうすこし丁寧に言うと『微分とは、ある量の変化のようすを非常に小さな間隔の割り算で記述したもので、積分とは、ミクロな変化量に分割してから足し合わせてマクロな積算量を求める方法』である。
- 自動車に乗って何時間かドライブすることを考えてみよう。時刻 t における自動車の速度を$v(t)$ [km/時]、出発してから時刻 t までの走行距離を$L(t)$ [km]と表すことにする。
- 微分：走行距離について詳細なデータ、つまりL(t)が得られているときにv(t)を求める問題
  - ⊿t を微小な時間間隔とすると、時刻 t から時刻t+⊿t の間に増える走行距離は⊿L(t)＝L(t+⊿t)−L(t) なので、時刻t での速度は、$v(t) = \frac{\Delta L(t)}{\Delta t}$となる。
  - ⊿tを小さくしていった極限について、$\frac{\Delta L(t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dL(t)}{dt}$ と記述すると、

  $v(t) = \frac{dL(t)}{dt}$ ・・・⑧

  という微分方程式ができあがる。

  『速度は走行距離の時間微分量』であることを了解されたし。

微分と積分の話(2)

- 積分：速度について詳細なデータ、つまりv(t)が明らかなときに、その積算であるL(t)を求める問題
  - ⊿t を微小な時間間隔とし、時刻 t から時刻t+⊿t の間に増える走行距離は、⊿$L(t)$＝⊿t・$v(t)$ となる。
  - 時刻0から時刻tまでに走った距離の合計 L(t)は、時間tをn個（i=1, n）に細分し、それぞれの時間幅を⊿t_iとすると、

  $L(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot v(t_i)$ となる。（Σは、i=1からi=nまでの和を示す。）

  ⊿t_iを小さくしていった極限について

  $$L(t) = \int_{t=0}^{t=t} v(t)dt \quad ・・・⑨$$

  という記述が、$v(t)$の$t=0$ からt までの積分を表す式である。

  要は『走行距離は速度の時間積分量』であることを了解されたし。

微分と積分の話(3)

- 何でもそうだと思うが、『まずなじんで、それから考える』方が身につきやすい。
  - 微分の記号 $\frac{dy}{dx}$ ：“ディーワイ・ディーエックス”と読むそうだ
  - 積分の記号 $\int f(x)dx$：“インテグラル･エフエックス･ディーエックス”と読むそうだ

1. $y = f(x) = a$ のとき（aは定数）、
   ・微分：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 0$ （変化なし．例えば速度一定） ・積分：$\int y\mathrm{dx} = ax + C$
2. $y = f(x) = ax$ のとき、
   ・微分：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = a$ （変化は一定．例えば加速度一定） ・積分：$\int y\mathrm{dx} = \frac{1}{2}ax^2 + C$
3. $y = f(x) = ax^2$ のとき、
   ・微分：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2ax$ （xに比例した変化） ・積分：$\int y\mathrm{dx} = \frac{1}{3}ax^3 + C$
4. $y = f(x) = e^x$ のとき、
   ・微分：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = e^x$ ・積分：$\int y\mathrm{dx} = e^x + C$
5. $y = f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ のとき、
   ・微分：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -x^{-2}$ ・積分：$\int y\mathrm{dx} = log_e x + C$

- 積分にCが付いているのは、積分範囲（和を求める範囲）が決まっていないからで、『不定積分』と呼ばれる。範囲が決まっている場合は『定積分』と呼ばれ、ひとつの値が得られる。

たとえば、 $\int_{x=2}^{x=10} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^{10} = \left(\frac{1}{2}10^2\right) - \left(\frac{1}{2}2^2\right) = 50 - 2 = 48$

放射性崩壊の微分方程式

＜復習＞
- ベクレルBqとは１秒間当りの放射性崩壊数。崩壊定数λとは放射性同位体原子の時間当り崩壊確率。
- したがって、時刻tでの放射性同位体の原子数をN(t)とすると、ベクレル数A(t)は、$A(t) = \lambda N(t)$ となる。

******

N(t)に着目すると、放射性崩壊により単位時間当りλN(t)個ほど原子が減って行く。つまり、

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \cdots⑩$$

という微分方程式が成立する。

⑩式を、$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$ と書き換えて両辺を積分すると、

$\log_e \mathrm{N(t)} = -\lambda t + C$ となる（緑字の部分は補足で説明）。

$N(t) = e^{-\lambda t + C} = e^c \cdot e^{-\lambda t} = C' e^{-\lambda t}$ となる。

初期条件として、$N(0)=N_0$ とすると、$C'=N_0$ となるので、

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \cdots⑪$$

という放射性崩壊の基本式が得られる。

半減期と崩壊定数の関係式

⑩式　$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$　までを理解して頂ければ、

②式　$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$　に納得して頂く作業は、すでに終わったに等しい。

半減期（$T_{1/2}$）とは、初めの放射能量A_0が半分になる時間だから、⑩式から、$t=T_{1/2}$ のとき、

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \rightarrow 2 = e^{\lambda T_{1/2}}$$

となり、最後に両辺の自然対数をとると（$\ln a^b = b \cdot \ln a$、$\ln e = 1$ を思い出して）、

$ln2 = \lambda \cdot T_{1/2}$　となり、（$\ln 2 = log_e 2 = 0.6931 \ldots$.なので）

$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}}$　が得られる。

以上

補足1：$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$ の積分解

$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int -\lambda dt$　を変形して、

$$\int \frac{1}{N(t)} dN(t) = -\lambda \int dt$$

＜左辺の積分＞

$\int \frac{1}{x} dx = log_e x + C$ を思い出して、

$$\int \frac{1}{N(t)} dN(t) = log_e N(t) + C_2$$

＜右辺の積分＞

$a \int dx = ax + C$ を思い出して、　$-\lambda \int dt = -\lambda t + C_1$

したがって、　$log_e N(t) = -\lambda t + C'$

$$N(t) = e^{-\lambda t + C'}$$

$$N(t) = e^{C'} e^{-\lambda t} = C_0 e^{-\lambda t}$$

補足1の補足：$\frac{1}{x}$の積分

ある関数$f(x)$に関連して、

x で微分すると$f(x)$となるような元の関数$F(x)$は『$f(x)$の原始関数(primitive function）』と呼ばれ、『f (x) はF (x) の導関数(derived function）』と呼ばれる対応関係にある。

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \leftrightarrows \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

つまり、$\ln x$の導関数が$1/x$であることを示せば、$1/x$の原始関数が $\ln x$ であることを示したことになる。$F(x)=\ln x$の導関数は、

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x}$$ なので、

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$ 故に、$\int\frac{1}{x}dx = log_e x + C$

付録：放射線遮蔽計算の基礎

ガンマ線が、ある物質の表面に垂直入射したとして、表面での放射線の強さ（線束）をI_0とする。その物質の線減衰係数をμ[1/cm]とすると、表面からx cmの深さでの線束$I(x)$は、

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

となる。この式は、放射線の時間にともなう減衰計算と同じ形である。

右の図は、セシウム137のガンマ線（662keV）について、表面からの深さにともなう減衰を計算してみたものである。

図から、強度が半分になる厚さ（半価層）を求めると、

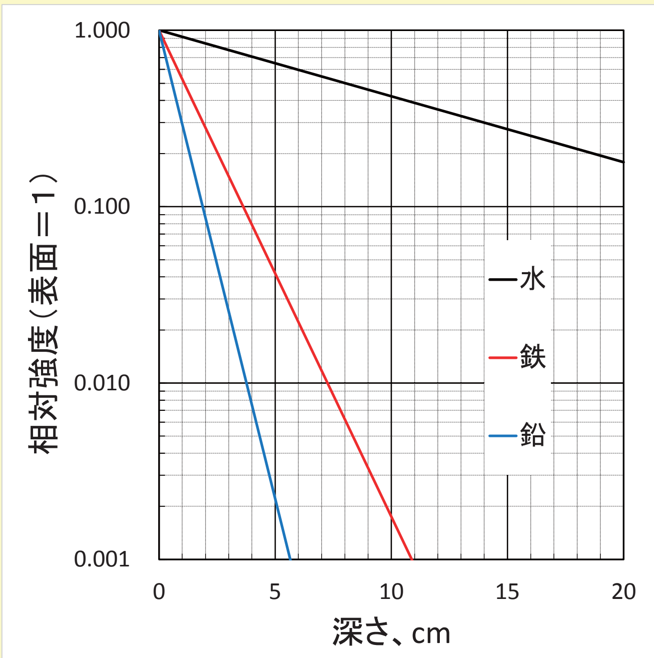
- 水：８ｃｍ
- 鉄：5.７ ｃｍ
- 鉛：1.１ ｃｍ

となる。

（遮蔽計算は、散乱線の効果などを考えるとベクレル数の減衰計算ほどシンプルには行かないが基本は同じと考えて良い。）

アイソトープ手帳より計算

662keVの線減衰係数、cm^{-1}		
水（H_2O）	鉄（Fe）	鉛（Pb）
0.086	1.2	0.645



おわりに

2016年3月に定年退職してからの私の身分は、知り合いにお願いして、50万～100万程度の受託研究を元の研究室に入れてもらい、その受託研究に関する仕事をするという形での非常勤研究員である。

今年は、いわき市の『放射能市民測定室たらちね』にお願いして、 『福島第１原発事故にともないいわき市の農水産物放射能汚染の現状調査と内部被曝量評価に関する研究』というテーマで受託研究を受け、たらちねさんとの共同研究のようなことをやっている。

２月にたらちねの女性スタッフが来所され、原子炉やゲルマの見学をされるとともに、私の方から放射線・放射能について簡単なレクチャーをする機会があった。

その際に感じたのは、放射能・放射線の測定の基本について納得して頂くためには、それなりの数学的知識が不可欠と思われたことだった。

このメモがどこまで役に立つかは分からないが、読んで頂ければ、それなりに『数式になじんで頂くことには役立つ』だろうと思っている。

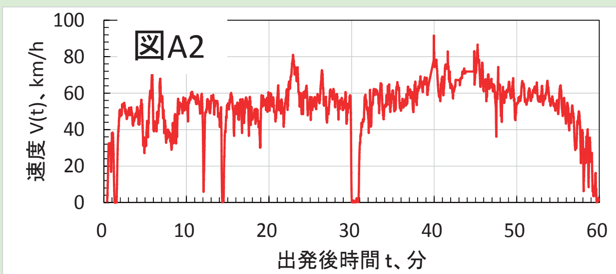
2019. 5. 3記

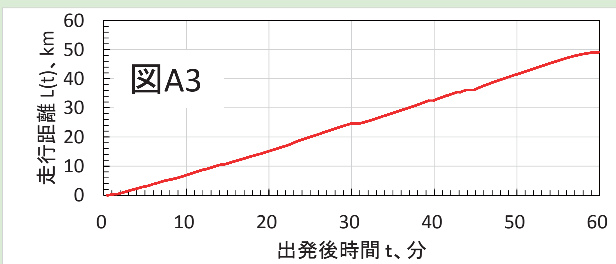
『ｅや微分積分はやっぱり分からん』という反響があったので、まえがきと付録A&Bを追加してみた。（2019. 5. 28）

「まえがき」のあとがき 追加（2019. 6. 10, 6. 24）

付録A－1：積分①

2018年3月31日、私たちのグループは、浪江中学の要請を受けて二本松の仮校舎から浪江町に新設された浪江創成小中学までの放射線量と速度を、GPS付線量計で１秒ごとに計測した（図A1）。図A2はその道中の速度$v(t)$の変動である。目的地についたのは、出発してから3408秒後だった。





●積分例① 走行距離Lを求める：

$$L = \sum_{i=1}^{i=3408} v(t_i)\cdot\Delta t_i = \int_{t=0}^{t=3408\ \mathrm{sec}} v(t)dt$$
$$= 49.1\ km$$

Δt_iは等間隔で１秒（＝3600分の1時間）．

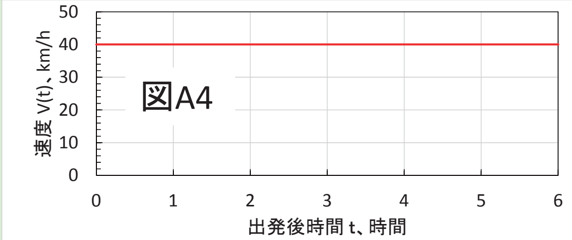
Δt_iを短くした極限が積分で、$V(t_i)\Delta t_i \rightarrow v(t)dt$と表記し、積算範囲を∫で示す。図A3は走行距離L(t)のプロットである.

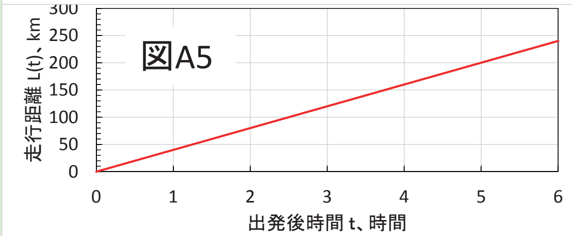
付録A-2：積分②

●積分例②．速度一定 *v(t)=a* のとき（図A4）の走行距離*L(T)*を求める（図A5）

$$L(T) = \int_0^T v(t)dt$$
$$= \int_0^T adt = aT$$

速度*a=40km/h*で、*T=6h*なら *L=240km*

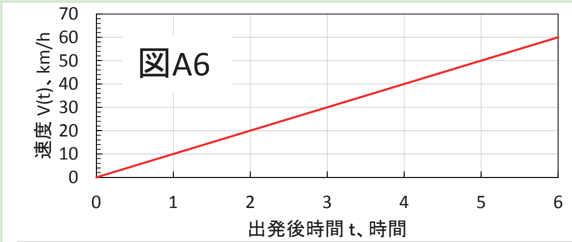


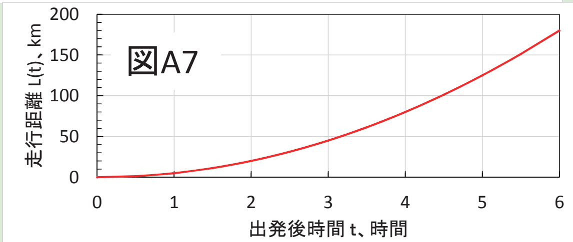


●積分例③．速度が時間に比例して増加 *v(t)=at* のとき（図A6）の走行距離*L(T)*を求める（図7）

$$L(T) = \int_0^T v(t)dt$$
$$= \int_0^T atdt = \frac{1}{2}aT^2$$

速度増加率*a=(10km/h)/h*で、*T=6h*なら *L=180km*





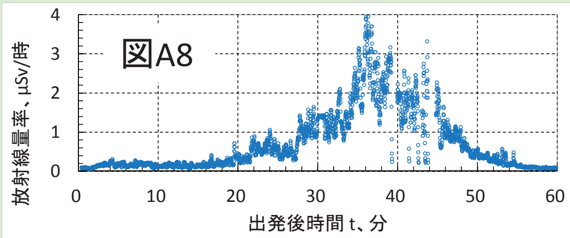
付録A-3：積分③

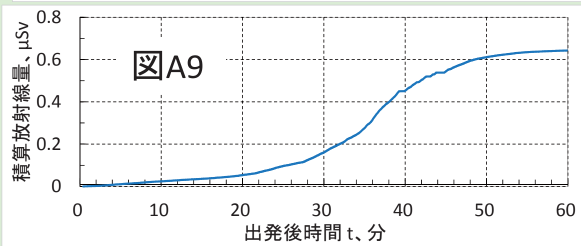
●積分例④．図A8は、図A1に示したルートの放射線量 d*(t)* *μSv/h*である。時間Tまでの積算放射線量*D(T)* *μSv*は、*d(t)*を積分して（図A9）、

$$D(T) = \int_{t=0}^{t=T} d(t)dt$$

全行程（T=3408sec）では

$$D(3408\mathrm{sec}) = \sum_{i=1}^{i=3408} d(t_i)\cdot\Delta t_i$$
$$= 0.64\,\mu\mathrm{Sv}$$



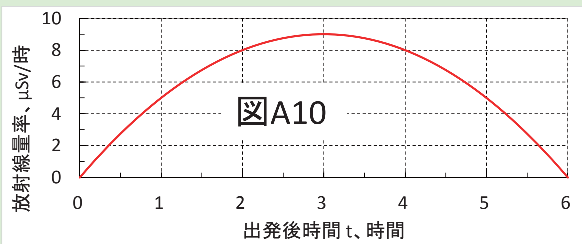


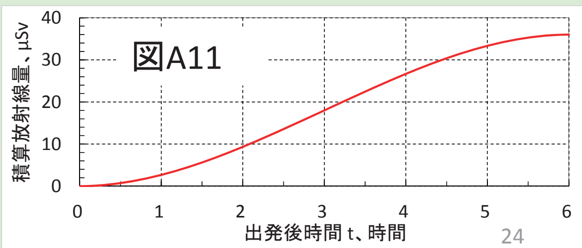
●積分例⑤．図A10に示した放射線量は、$d(t) = -t^2 + 6t$ という時間の２次関数である（t=0と6時間のときd=0、t=3時間のとき最大値d=9 μSv/hとなる）。

tとt^2は積分可能な関数なので、d(t)も積分可能で、

$$D(T) = \int_0^T (-t^2 + 6t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{3}T^3 + 3T^2$$

T=6時間のとき、D(6h)=36 μSvとなる（図A11）。





付録A-4：積分④　定積分と不定積分

数学の授業ではふつう［微分］→［不定積分］→［定積分］の順に習うのだが、数学が苦手な方には、順番を逆にした方が分かりやすいような気がしてきた。

●定積分：積分例①～⑤を了解して頂いた方には、定積分については納得してもらったと思っている。定積分は、上限や下限が決まっている、ある一定範囲内の積算値を求める計算である。積算の対象となる値がある関数 $f(x)$ で記述できれば、定積分の値は、積分範囲を(a, b)として、$\int_a^b f(x)\,dx$ と記述された。

●不定積分：具体的な積算例とは関係なく、数学的問題として『ある関数$f(x)$に対応する積分関数$F(x)$はどんな関数か』という問題に答えるのが不定積分である。たとえば、

$f(x) = a$ であれば、$F(\mathrm{x}) = \int a\,dx = ax + C$

$f(x) = ax$ であれば、$F(\mathrm{x}) = \int ax\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + C$

$f(x) = ax^n$ であれば、$F(\mathrm{x}) = \int ax^n\,dx = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + C$

『不定』というのは、積算範囲が決まっていないので積算値は不明、つまり不定。『数学として両辺を“＝”でつなぐため』に、（不定な値である）積分定数Cというのを加えてある。

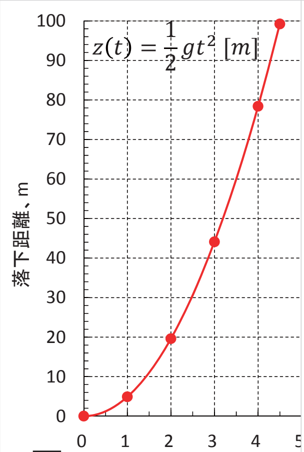
付録B-1：微分と積分

ガリレオは、ピサの斜塔から、大きな鉄球と小さな鉄球を落として地面に着く時間が同じであることを実験したそうだ。いま、高さ100mのビルの上から鉄球を落としたとしよう。（空気抵抗を無視すると）図B1は落下距離Z(t)、図B2は落下速度v(t)、図B3は落下加速度gである。

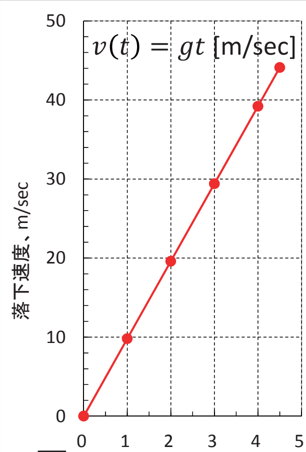
●図B1：100m落下して地上に落ちるのは4.52秒後である。

●図B2：落下速度は時間に比例して増加し、4.52秒後は44.1 m/sec。

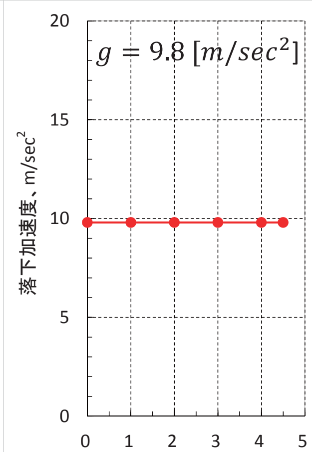
●図B3：落下の加速度は9.8 m/sec/secで一定（“重力加速度”と呼ばれる）。



図B1



図B2



図B3

●落下距離[m]を時間t[sec]で微分すると速度v(t)[m/sec]：$\frac{dZ(t)}{dt} = gt = v(t)$

●落下速度[m/sec]を時間t[sec]で微分すると加速度g[(m/sec)/sec]：$\frac{dv(t)}{dt} = g$

●加速度g[m/sec^2]を時間t[sec]で積分すると速度v(t)[m/sec]：$\int_0^t g dt = gt = v(t)$

●速度v(t)[m/sec]を時間t[sec]で積分すると落下距離z(t)[m]：$\int_0^t v(t)dt = \frac{1}{2}gt^2 = z(t)$

以上をじっくり眺めると、『落下という現象の基本的な物理量は重力加速度g』であることが分かる(はずである)。

付録B－2：eの便利な（特殊な）性質

『なんでeみたいな、わけの分からん数字が出てくるねん！』と感じてらっしゃる方もあることと思う。その答を考えて思いついたのは、『e^xは微分しても積分してもe^xのままだ』ということだった。

◆微分　$\frac{de^x}{dx} = e^x$　・・・(1)　　◆不定積分　$\int e^x\, dx = e^x + C$　・・・(2)

ちょっと形が変わっても、

◆微分　$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$　・・・(3)　◆不定積分　$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$　・・・(4)

ここで、本文テキストの⑩式を考えて見る.

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \cdots(5)$$

これは、放射性同位元素の原子数の時間変化を記述する微分方程式である。

$t = 0$ における原子数を N_0 とし、$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$　・・・(6)

としよう。(3)式を参照し、$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d(N_0 e^{-\lambda t})}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N(t)$

となり、(6)式が(5)式の解であることが了解される。

付録B－3：再度のまとめ

時間 0 における原子数を N_0 とすると、時間 t における原子数$N(t)$ は、

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

である。ベクレル数 $A(t)$ は、原子の数に崩壊定数 λ を掛けたものなので、

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

半減期 $T_{1/2}$ というのは、放射能量が半分になる時間なので、

$$A(T_{1/2}) = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} A_0$$

ゆえに、　$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda T_{1/2}} = 2$

さらに、両辺の自然対数をとると、

$$\log_e e^{\lambda T_{1/2}} = \log_e 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda T_{1/2} = \log_e 2 \qquad \log_e 2 = 0.693$$

なので　$\boldsymbol{\lambda T_{1/2} = 0.693}$　となり、メデタシメデタシ. . .

「まえがき」のあとがき①

一卵性双生児のようなクローン人間が1000人いたとしよう。1000人の見かけは全く同じで区別がつかず、みんなAさんと呼ぶことにする。Aさんたちは、歳をとらず何年経っても変化しない。ただ、不思議なことに、毎年、死亡率1割で亡くなってしまう。

●問題：いまAさんが1000人いたとして、100人になるのは何年後でしょう。

[解1]Aさんのt年後の人数をN(t)とすると、Aさんの人数減少について

$$\frac{dN(t)}{dt} = -0.1N(t)dt$$

という微分方程式が成立する。この式を解くと、

$$N(t) = Ce^{-0.1t}$$

初期条件、『t=0のとき1000人』より、

$$N(t) = 1000e^{-0.1t}$$

100人になるのをT年後とすると、

$$100 = 1000e^{-0.1T} \rightarrow e^{0.1T} = 10$$

両辺の自然対数をとって、$0.1T = ln10 = 2.30$

したがって　$T = \frac{2.30}{0.1} = 23.0$ 年となる。

[解2]　λは0.1(/年)なので、λ×$T_{1/2}$＝0.693の関係式より、半減期$T_{1/2}$は、0.693÷0.1＝6.93年。半減期のX倍ほど時間が経つと1/10になるとすると　2^x＝10。

両辺の常用対数をとると、$Xlog2 = log10 = 1.$　$log2 = 0.301$ なので、$X = 1/0.301 = 3.32$

したがって、$\mathrm{T} = 3.32 \times 6.93 = 23.0$　年となる

「まえがき」のあとがき②

●問題1：天然ウラン1gの放射能量は何ベクレルでしょう？

[答え]

・核データ（https://wwwndc.jaea.go.jp/cgi-bin/nucltab14?92）より、天然ウランの原子量は、238.0.

・１ｇの天然ウランに含まれる原子数は、（1/238.0モル）×（6.02×10^{23}個/モル）＝2.53×10^{21}個

・そのうち、ウラン238は、99.3%なので2.51×10^{21}個
　ウラン235は、0.7%なので1.77×10^{19}個

・一方。ウラン238の半減期は44.7億年なので、崩壊定数λ=0.693/(44.7×10^{8})/365.25/24/3600 =4.91×10^{-18}/秒.

・ウラン235の半減期は7.04億年なので、崩壊定数λ=0.693/(7.04×10^{8})/365.25/24/3600 =3.12×10^{-17}/秒

・従って、ウラン238の放射能量は、（4.91×10^{-18}）×（2.51×10^{21}）＝12300 Bq
　ウラン255の放射能量は、（3.12×10^{-17}）×（1.77×10^{19}）＝552 Bq

・天然ウラン１ｇの放射能量は、ウラン238とウラン235を合わせて、約13000Bqとなる。

●問題2：花崗岩中のウラン量を2ppmとして、1kgの花崗岩に含まれるウラン放射能はどれくらいでしょう？

[答え]

・ppmとは100万分の１のことなので、１kg中の2ppmは２ｍｇとなる。

・1mgの天然ウランの放射能量は13Bq。したがって、2ppmのウランを含む花崗岩のウラン放射能は26Bq/kgとなる。